

Le cheminement de votre pensée doit être apparent (autrement dit : il faut justifier ses réponses ;). Le barème est donné à titre indicatif, et des points seront attribués pour la présentation et la rédaction de la copie ; En particulier, mettez vos résultats en valeur, par exemple en les soulignant d'une autre couleur ou en les encadrant. Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont potentiellement plus difficiles ou plus longs que les autres.

Les calculatrices et les documents de tout type sont interdits.

Exercice 1 (6 pts). Questions de cours

- Définir mathématiquement et expliquer les notions de famille libre, famille génératrice, et base. Application : la famille $\mathcal{F} = \{(1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?
- Définir et expliquer la notion de supplémentarité.
- Soit $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un espace vectoriel. On a la relation suivante : $v_1 + v_2 = v_3 - v_4$. Dire si les affirmations suivantes sont correctes (justifier très brièvement) :
 - $F = \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$
 - $F = \text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$
 - $F = \text{Vect}\{v_3, v_4\}$
- Donner la formule de Grassman, reliant les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$.
- Expliquer de manière concise ce qu'est un développement limité, puis rappeler les développements limités au voisinage de 0 de $\exp(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.

Dès lors que l'on aura donné ces définitions, on pourra se contenter d'y faire référence lors des exercices ultérieurs, si nécessaire.

Exercice 2 (3 pts). Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

- Un étudiant (que l'on ne nommera pas, mais on sait tous de qui il s'agit), écrit, après de nombreux calculs, le résultat du développement limité suivant : $\frac{\cos(x)}{4-x^2} \underset{0}{=} 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + o(x^3)$. Sans chercher à calculer le DL, dire si l'expression proposée est correcte ou non. Si non, expliquer quel(s) élément(s) posent problème.
- Obtenir le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Exercice 3 (6 pts). Soient F et G deux ensembles définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0\}$$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (on l'admet pour G).
- Déterminer une base de F , puis de G . Quelles sont les dimensions respectives de F et de G ?
- F et G sont-ils supplémentaires ?
- Donner les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans la réunion des deux bases trouvées lors de la question 2 (Si on n'a pas trouvé de base à la question 2, on pourra tout de même expliciter la démarche générale.).

Exercice 4 (2 pts). Soit $F = \text{Vect}\{(1, 2, 1)\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer un système d'équations caractérisant F .

Exercice 5 (* 2 pts). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, avec $\dim(F) = \dim(G) = 3$. Montrer que $\dim(F \cap G) \geq 2$.

Exercice 6 (4 points). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel de E des fonctions paires, et G celui des fonctions impaires.

1. Rappeler la définition d'une fonction paire, ainsi que celle d'une fonction impaire.
2. Démontrer que F est bien un sous-espace vectoriel de E . On l'admettra pour G .
3. (*) Prouver que $F \oplus G = E$.

Exercice 7 (Bonus). « S'il vous plaît...dessine-moi un espace vectoriel... »